



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس الأعداد العقدية الجزء 2

I. المعادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد في المجموعة \mathbb{C} .01. حل المعادلة: $z \in \mathbb{C} / z^2 = a$ مع a عدد حقيقي

❖ نشاط:

أ - حل المعادلة: $z \in \mathbb{C} / z^2 = 0$. ب - حل المعادلة: $z \in \mathbb{C} / z^2 = 2$. ج - حل المعادلة: $z \in \mathbb{C} / z^2 = -2$.
د - أعط الخاصية:

❖ خاصية:

ليكن a من \mathbb{R} . مجموعة حلول المعادلة: $z \in \mathbb{C} / z^2 = a$ هي:

- $S = \{0\}$ إذا كان: $a = 0$
- $S = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$ إذا كان: $a > 0$
- $S = \{i\sqrt{-a}, -i\sqrt{-a}\}$ إذا كان: $a < 0$

02. المعادلة $z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$ مع a و b و c من \mathbb{R} (معاملاتها أعداد حقيقية) مع $a \neq 0$.

❖ نشاط:

03. خاصية و تعريف:

لنعتبر المعادلة: $(E): z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$ حيث a و b و c من \mathbb{R} (معاملاتها أعداد حقيقية) مع $a \neq 0$.المعادلة (E) تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول z في \mathbb{C} معاملاتها الأعداد حقيقية a و b و c مع $a \neq 0$ العدد الحقيقي $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة (E).إذا كان $\Delta = 0$ المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا مزدوج $z = \frac{-b}{2a}$ إذا كان $\Delta > 0$ المعادلة (E) تقبل حلين حقيقيين هما: $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ إذا كان $\Delta < 0$ المعادلة (E) تقبل حلين عقديين مترافقين و مختلفين هما: $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ لدينا: $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ و $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$ تعميل ل: $az^2 + bz + c$ هو $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$: $\Delta \neq 0$. $az^2 + bz + c = a(z - z_1)^2$: $\Delta = 0$

04. برهان:

لنعتبر المعادلة: $(F): z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

أ- لدينا و منه:

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$$



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس الأعداد العقدية الجزء 2

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \quad ; (a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad ; (1)$$

حالة 1: $\Delta = 0$ نحصل على: $z = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a}$ ومنه: المعادلة لها حل مزدوج هو $z = -\frac{b}{2a}$

حالة 2: $\Delta > 0$ بما أن $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ المعادلة لها حلين مختلفين هما: $z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ أو $z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

حالة 3: $\Delta < 0$ إذن $-\Delta > 0$ ومنه: $\Delta = -1 \times (-\Delta) = i^2 (\sqrt{-\Delta})^2 = (i\sqrt{-\Delta})^2$

$$(1) \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{أو} \quad z + \frac{b}{2a} = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{أو} \quad z = -\frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

ومنه: المعادلة لها حلين هما: $z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ أو $z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ (حلين عقديين مترافقين).

05. مثال:

لنعتبر المعادلة التالية: $(E): z \in \mathbb{C} / z^2 + z + 1 = 0$

(1) أحسب: Δ المميز للمعادلة (E):

(2) حل المعادلة: $(E): z \in \mathbb{C} / z^2 + z + 1 = 0$.

(3) أعط الشكل المثلي للحلين.

II. الشكل العقدي لبعض التحويلات في المستوى

01. مفردات:

المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

$$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

• نعتبر تطبيق f المعروف بما يلي: $z \mapsto f(z) = z'$

• M و M' نقطتين من (P) لحقهما على التوالي z و z'.

• التطبيق f في المستوى (P) الذي يربط كل نقطة $M_{(z)}$ بالنقطة $M_{(z')}$ يسمى تحويل المرتبط ب g.



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس الأعداد العقدية الجزء 2

• الكتابة $z' = f(z)$ تسمى الكتابة العقدية للتحويل f .

02. الكتابة العقدية لبعض التحويلات الهندسية:

أ- الكتابة العقدية للإزاحة $f = t_{\vec{u}}$:

❖ خاصية:

الكتابة العقدية للإزاحة $t_{\vec{u}}$ ذات المتجهة \vec{u} التي لحقها b هي $z' = z + b$ (أي $f(z) = z + b$).

❖ ملحوظة:

$\vec{u} = \vec{0}$ نحصل على $z' = z$ أي $M = M'$ التحويل يصبح التطبيق المطابق في المستوى.

❖ مثال:

لنعتبر التحويل f الذي يربط كل نقطة $M_{(z)}$ بالنقطة $M_{(z')}$ حيث $z' = z + 2 - 3i$.

التحويل هو إزاحة ذات المتجهة \vec{u} التي لحقها $b = 2 - 3i$ (أي $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$).

ب- الكتابة العقدية للتحاكي $f = h(\Omega, k)$:

❖ خاصية:

الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه Ω التي لحقها ω ونسبته عدد حقيقي k غير منعدم و يخالف 1 هو: $z' - \omega = k(z - \omega)$

أو أيضا: $z' = kz + b$ (مع $b = k\omega + \omega \in \mathbb{C}$) (أي $f(z) = kz + b$ مع $k \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$).

❖ ملحوظة:

النقط Ω ولحقها ω صامدة بالتحويل تحقق ما يلي: $\omega = k\omega + b$ إذن: $\omega = \frac{b}{1-k}$.

❖ مثال:

لنعتبر التحويل f الذي يربط كل نقطة $M_{(z)}$ بالنقطة $M_{(z')}$ حيث $z' = 2z + 1 + i$.

لدينا: الكتابة العقدية هي على شكل: $z' = kz + b$ مع $k = 2 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ إذن التحويل هو تحاكي نسبته $k = 2$ و مركزه

$\Omega_{(\omega)}$ حيث: $\omega = \frac{b}{1-k} = \frac{1+i}{1-2} = -1-i$

خلاصة: التحويل هو التحاكي: $h(\Omega_{(\omega=-1-i)}, 2)$ (المركز هو النقطة $(-1, -1)$)

ج- الكتابة العقدية للدوران $f = r(\Omega, \theta)$

❖ خاصية:

الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه Ω التي لحقها ω وزاويته θ هو: $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

أو أيضا: $z' = ze^{i\theta} + b$ (مع $b = \omega - \omega e^{i\theta} \in \mathbb{C}$) (أي $f(z) = ze^{i\theta} + b$).

❖ ملحوظة: بالنسبة للتطبيق: $f(z) = ze^{i\theta} + b$

• المركز هو: النقط Ω ولحقها ω صامدة بالتحويل تحقق ما يلي: $\omega = \omega e^{i\theta} + b$ إذن: $\omega = \frac{b}{1-e^{i\theta}}$.



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس الأعداد العقدية الجزء 2

• قياس زاويته هو : $\theta \equiv \arg(e^{i\theta}) (2\pi)$ أو أيضا : $\theta \equiv \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) (2\pi)$.

❖ مثال :

نعتبر التحويل f الذي يربط كل نقطة $M_{(z)}$ بالنقطة $M_{(z')}$ حيث : $z' = -iz + 1 - i$.

لدينا : $z' = -iz + 1 - i = e^{i\pi}z + (1 - i)$ الكتابة العقدية هي على شكل : $z' = ze^{i\theta} + b$

التحويل هو الدوران الذي :

لحق مركزه $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{1+i} = -i$ ومنه : المركز هي النقطة $\Omega_{(\omega=-i)}$ أو أيضا $\Omega(0, -1)$.

قياسات زاويته : $\arg(e^{i\theta}) \equiv \arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

خلاصة: التحويل هو الدوران : $r\left(\Omega_{(\omega=-i)}, -\frac{\pi}{2}\right)$ (مركزه هي النقطة $\Omega(0, -1)$)

د- تمرين تطبيقي :

من بين الكتابات العقدية التالية حدد طبيعة التحويلات و حدد عناصرها المميزة .

1. $z' = -4z - 2 + 5i$

2. $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 4 + 2i$

جواب :

1. بالنسبة ل : $z' = -3z - 8 + 12i$

لدينا : الكتابة العقدية هي على شكل : $z' = kz + b$ مع $k = -4 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ إذن التحويل هو تحاكي نسبته $k = -3$.

مركزه : $\Omega_{(\omega)}$ نقطة صامدة إذن $\Omega = \Omega'$ ومنه $\omega' = \omega$ و بالتالي : $\omega = -3\omega - 8 + 12i$ ومنه :

$$\left(\omega = \frac{b}{1-k} = \frac{-8+12i}{1+3} = -2+3i\right) \quad \left(\omega = \frac{-8+12i}{4} = -2+3i\right)$$

خلاصة: التحويل هو التحاكي نسبته $k = -3$ و مركزه Ω التي لحقها $\omega = -2 + 3i$.

2. بالنسبة ل : $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 4 + 2i$

لدينا : $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 4 + 2i = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)z + -4 + 2i = e^{i\frac{\pi}{6}}z - 4 + 2i$

$$z' = ze^{i\theta} + b$$

التحويل هو الدوران الذي :

لحق مركزه $\omega = \frac{b}{1-e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{-4+2i}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)} = -4 - \sqrt{3} - (3+2\sqrt{3})i$ ومنه : المركز هي النقطة $\Omega(-4 - \sqrt{3} - (3+2\sqrt{3})i)$

أو أيضا $\Omega(-4 - \sqrt{3}; -(3+2\sqrt{3}))$.

قياس زاويته : $\arg(e^{i\theta}) \equiv \arg\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

خلاصة: التحويل هو الدوران : و مركزه Ω التي لحقها $\omega = -4 - \sqrt{3} - (3+2\sqrt{3})i$ وزاويته $\frac{\pi}{6}$.



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس الأعداد العقدية الجزء 2

ملخص لبعض التحويلات :

الكتابة العقدية ل f مع $M'(z')$ و $M(z)$	تعريف التحويل مع : $f(M) = M'$	العناصر المميزة	طبيعة التحويل : f
$z' - z = b$ أي $z' = z + b$	$\overline{MM'} = \vec{u}$	<ul style="list-style-type: none"> متجهة معلومة \vec{u} غير منعدمة لحقها b 	إزاحة : $f = t_{\vec{u}}$
$z' - \omega = k(z - \omega)$ أي $z' = kz + b$ (مع $b = k\omega + \omega \in \mathbb{C}$)	$\overline{\Omega M'} = k \overline{\Omega M}$	<ul style="list-style-type: none"> نقطة Ω صامدة لحقها ω عدد حقيقي k غير منعدم 	تحاكي : $f = h(\Omega, k)$
$z' - \omega = (z - \omega)e^{i\alpha}$ أي $z' - \omega = e^{i\alpha}z + b$ (مع $b = \omega - \omega e^{i\alpha}$)	$\begin{cases} \overline{\Omega M'} = \overline{\Omega M} \\ \left(\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'} \right) \equiv \alpha (2\pi) \end{cases}$	<ul style="list-style-type: none"> نقطة Ω صامدة لحقها ω زاوية موجهة قياسها α بترديد 2π 	دوران : $f = r(\Omega, \alpha)$

ملحوظة بالنسبة للدوران :

لدينا :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overline{\Omega M'} = \overline{\Omega M} \\ \left(\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'} \right) \equiv \alpha (2\pi) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\overline{\Omega M'}}{\overline{\Omega M}} = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \alpha (2\pi) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \alpha (2\pi) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = [1, \alpha] = e^{i\alpha} \\ &\Leftrightarrow z' - \omega = (z - \omega)e^{i\alpha} \end{aligned}$$